Kombinatorik

Referenz: [Engel: Problem Solving Strategies. Springer 1998, Ch. 4]
[Aigner-Ziegler: Proofs from the Book. Springer 2013, Ch. 25]

Schubfachprinzip (Pigeon hole principle): Für jede Abbildung f von einer endlichen Menge X in eine endliche Menge Y mit $|Y| < |X|$ existieren $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ und $f(x) = f(x')$.

Anwendung 1: Es gibt zwei Schweizer ohne Glatze, die die gleiche Anzahl Haare auf dem Kopf tragen.

Anwendung 2: Von beliebigen 7 Punkten in einem regelmässigen Hexagon der Seitenlänge 1 existieren 2 Punkte mit Abstand $\leqslant 1$.

Anwendung 3: Von je 5 Punkten auf einer Kugeloberfläche liegen 4 in einer abgeschlossenen Halbkugel.

Anwendung 4: Ein runder Tisch ist für n Personen gedeckt mit Namensschildern an jedem Platz. Nachdem sie sich gesetzt haben, stellen sie fest, dass keine an dem für sie vorgesehenen Platz sitzt. Zeige, dass man den Tisch so drehen kann, dass mindestens zwei Personen an dem richtigen Platz sitzen.

Anwendung 5: Auf jeder Party mit n Gästen gibt es immer zwei Gäste, die die gleiche Anzahl von Bekannten unter den anderen Gästen haben.

Anwendung 6: Betrachte Teilmengen X_1, X_2 einer endlichen Menge X mit $|X_1| + |X_2| > |X|$. Dann ist $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Anwendung 7: Jedes Element eines endlichen Körpers ist eine Summe von zwei Quadraten.

Verallgemeinertes Schubfachprinzip: Für jede Zerlegung einer endlichen Menge mit $mn+1$ Elementen in m disjunkte Teilmengen enthält eine dieser Teilmengen mindestens $n+1$ Elemente.

Anwendung 8: Von 33 Türmen auf dem Schachbrett kann man 5 auswählen, von denen keiner den anderen angreift.

Anwendung 9: Ramsey-Theorie

Satz 9a: Auf jeder Party mit 6 Gästen gibt es drei Gäste, die einander paarweise kennen, oder drei Gäste, die einander paarweise nicht kennen.

Satz 9b: Für beliebige $m, n \geqslant 2$ existiert $R(m,n)$, so dass auf jeder Party mit $\geqslant R(m,n)$ Gästen es immer m Gäste gibt, die einander paarweise kennen, oder n Gäste, die einander paarweise nicht kennen.

Anwendung 10: Dirichlet Approximation

Satz 10a: Für jede reelle Zahl α und jede ganze Zahl $N \geqslant 1$ existieren ganze Zahlen p und q mit $1 \leqslant q \leqslant N$ und $|q\alpha - p| \leqslant \frac{1}{N}$.

Folge 10b: Für jede irrationale reelle Zahl α und beliebige reelle Zahlen β sowie $\varepsilon \geqslant 1$ existieren ganze Zahlen a und b mit und $|a\alpha - b + \beta| \leqslant \varepsilon$.

Folge 10c: Jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ mit irrationaler Steigung kommt Gitterpunkten beliebig nahe.

Folge 10d: Für jede irrationale reelle Zahl α ist die Menge $\{a\alpha + b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathbb{R}$.

Folge 10e: Es gibt eine Potenz von 2, deren Dezimaldarstellung mit den Ziffern 999999 beginnt.

Folge 10f: Für jede irrationale reelle Zahl α existieren unendlich viele teilerfremde Paare von ganzen Zahlen p, q mit $q > 0$ und $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2}$.

Verallgemeinerung 10g: Für beliebige reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und jede ganze Zahl $N \geqslant 1$ existieren ganze Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ und q mit $1 \leqslant q \leqslant N$ und $|q\alpha_i - p_i| \leqslant \frac{1}{N^{1/n}}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.

Anwendung 11: Unter je $n+1$ verschiedenen ganzen Zahlen im Intervall $[1, 2n]$ existieren zwei, die zueinander teilerfremd sind.

Anwendung 12: Unter je $n+1$ verschiedenen ganzen Zahlen im Intervall $[1, 2n]$ existieren zwei, von denen eine die andere teilt.

Bemerkung: Beides gilt nicht für n verschiedene ganze Zahlen im Intervall $[1, 2n]$.

Anwendung 13: Für jede Folge ganzer Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ existieren $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$ mit

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_\ell \;\equiv\; 0 \bmod (n).$$

Anwendung 14: Für jede Menge X von 10 ganzen Zahlen im Intervall $[1, 100]$ existieren nichtleere disjunkte Teilmengen $Y, Z \subseteq X$ mit

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{z \in Z} z.$$

Anwendung 15: Jede Folge von $mn + 1$ reellen Zahlen enthält eine monoton wachsende Teilfolge der Länge $m + 1$ oder eine monoton fallende Teilfolge der Länge $n + 1$.

Bemerkung: Dies gilt nicht für mn Zahlen anstatt $mn + 1$.

Anwendung 16: In einem Quadrat der Seitenlänge 1 befinden sich 51 Ameisen. Zeige, dass man 3 davon mit einer Scheibe vom Radius $1/7$ abdecken kann.

Anwendung 17: Jeder Punkte einer Ebene ist rot oder blau gefärbt. Zeige: Es existiert ein Rechteck, dessen Ecken alle dieselbe Farbe haben.